



学会思考

—— 谈大学数学的学习

乐经良
上海交通大学数学学院
jly@sjtu.edu.cn



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

我们为什么学习数学



■ 数学教育对人才培养的作用与影响

① 各学科的基础和工具

“我坚决认为：任何一门自然科学，只有当它数学化之后，才能称得上是真正的科学”。

— *Kant*

“一种科学只有在成功地运用数学时,才算真正达到完善的程度.”

— *Marx*

➤ 数值模拟是现代科学研究的支柱之一

理论分析

科学实验

数值模拟

➤ 数学越来越多渗入各种领域

在传统自然学科始终发挥重要作用

生物—种群增长、分子结构 材料—相变理论

医学—传染病、药物代谢 管理—规划、运筹

经济—投入产出、金融分析 互联网技术 人工智能

➤ 两个例子

○ 伪造名画的鉴定

二战结束时，Meegeren
因将名画卖给纳粹头目Goering
受审，Meegeren辩称那些画是
他自己所作假画，其中包括荷兰
国宝级绘画大师Vermeer的“基督与长老”，究竟真或假？



这画的鉴定直至1960年代才由梅隆卡内基大学的化学家
和数学家解决。

放射性元素—衰变—微分方程

○ google 搜索引擎的网页排名

现今，若你打算了解某种信息，多半会利用互联网，在google (或百度)搜索引擎中输入一些关键词后，与此有关的网页地址会很快显示出来，而且这些网址会依照某些次序排列，通常是越靠前的越重要(意味着关注的人越多).那么 google 的搜索引擎是如何做到这点的呢？

网络—图论—矩阵—特征值

培养理性思维的重要载体

严谨：依靠逻辑推理展开

简洁：简单精确的表达方式

➤ 理性思维是一种重要能力

○ 微软的一次招聘试题

50个智者每人带一条狗来到一处，有些狗有病。若
1)狗的病不会传染也不会不治而愈；2)狗主人无法直接看出自己的狗患病，但能看出别人的狗患病；3)狗的主人一发现自己的狗患病必须当天(傍晚)击毙它。
1天、2天、…，第10天枪声响起。有多少条病狗？

④ 影响审美视角和价值判断

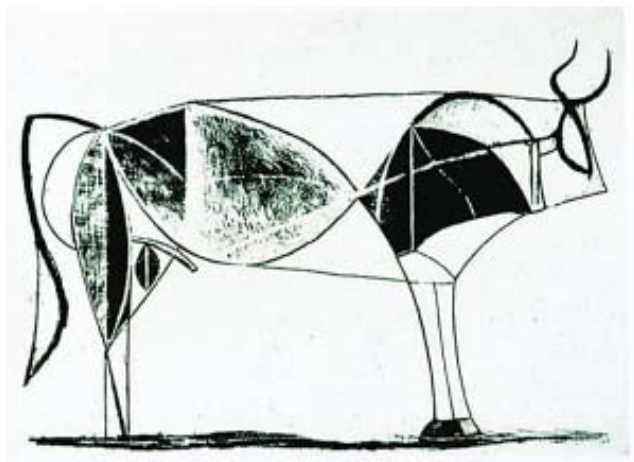
➤ 数学的内在之美

数学本身是美：简约、准确、完美，反映奇妙的规律（例：黄金分割、费马定理、 $e^{i\pi} + 1 = 0$ ）

“数学，它拥有的不仅仅是真理，还有一种至高无上的美，…它极度纯净，绝对完美，完美到只有最伟大的艺术才能展示那种境地。”

— *B. Russell*

➤ 数学与艺术有深刻的联系



格尔
尼卡





卢浮宫扩建工程



西雅图图书馆



洛杉矶水晶教堂



中央电视台主楼



国家大剧院



台北文化中心

➤ 数学影响价值判断

“在最广泛的意义上说，数学是一种精神，一种理性的精神。…正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生产；试图回答有关人类自身存在提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完美的内涵。”

—*M. Klein*

数学是一种理性的探索精神

- 数学追求完全确定、可靠的知识。
- 数学质疑那些违背科学规律和逻辑的现象和理论
- 数学不相信权贵，权势，权威
- 数学追求完美，简单、深层次的事物本质

高等数学学什么



► 高等数学与初等数学的不同

有限→无限

数量关系发生变化，某些关系不再成立

○ 希尔伯特旅馆

希尔伯特旅馆有 $1, 2, 3, \dots$ 无穷个房间

(a) 接收一个新客人

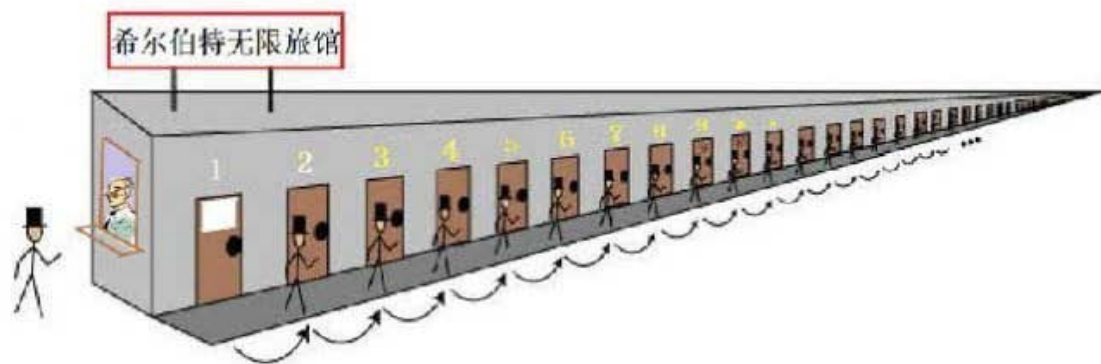
移动 $1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 5$

\dots





(b) 接收无穷多个客人，移动 $1 \rightarrow 2$ ， $2 \rightarrow 4$ ， $3 \rightarrow 6$ ， $4 \rightarrow 8$ ， $5 \rightarrow 10$ ， \dots
得到无穷多个空房间

这样无穷的数量集合称为可数集合：

元素可以与自然数一一对应

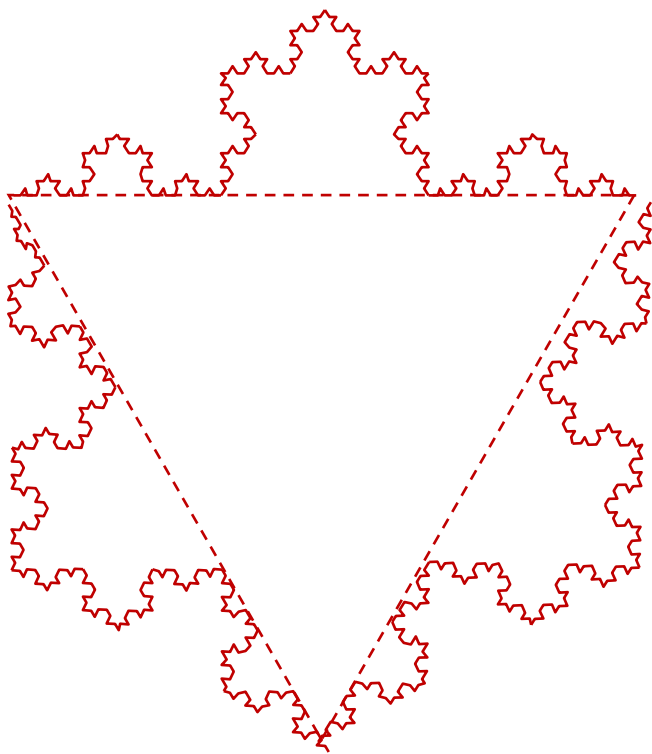
局部 = 整体

有理数集合是可数集

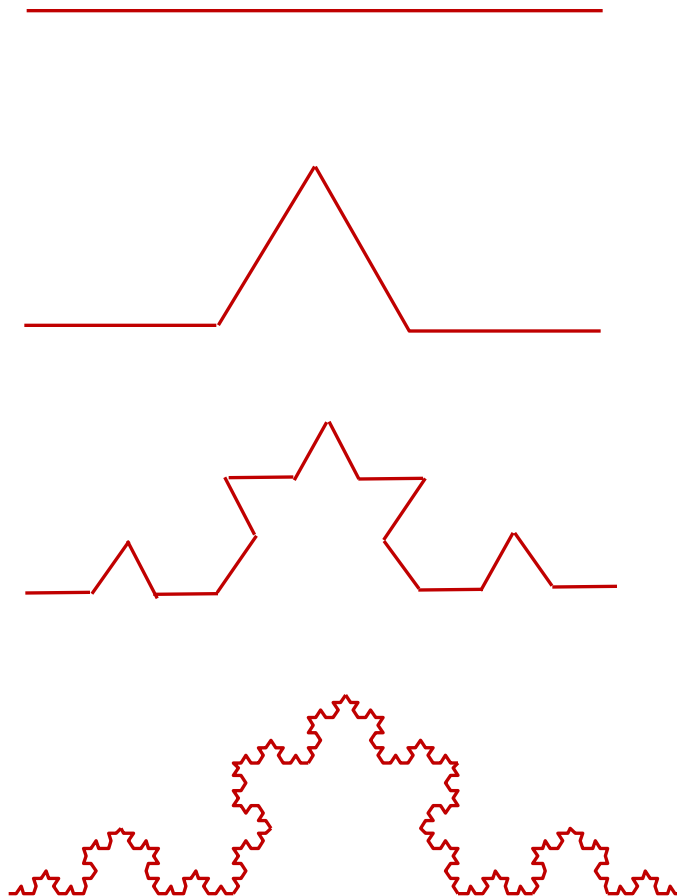
无理数集是不可数集



○ 科克曲线



有限面积被无限周长曲线所围



变化恒定→变化不恒定

研究变化率不恒定的变量的瞬时状态和某种整体状态

➤ 高等数学的内容

○ 微分 - 函数在一点附近的线性近似(局部线性化)

对 $y = y(x)$ 考虑自变量从 $x_0 \rightarrow x$, 增加了 $\Delta x = x - x_0$,

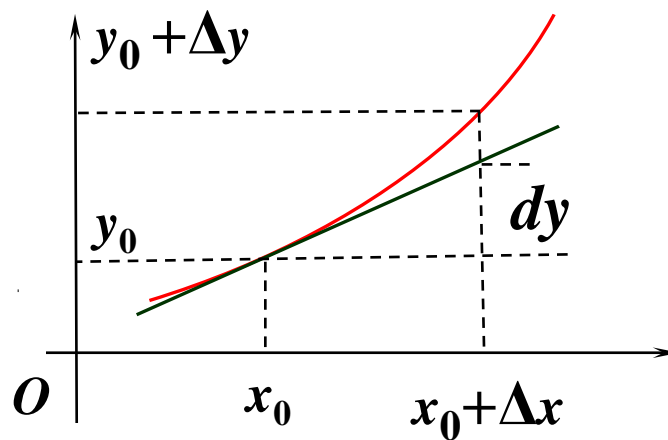
函数有增量 $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$,

最简单的近似

$$\Delta y \approx k \Delta x$$

误差最小, 右边就是微分 dy

其中 k 就是导数

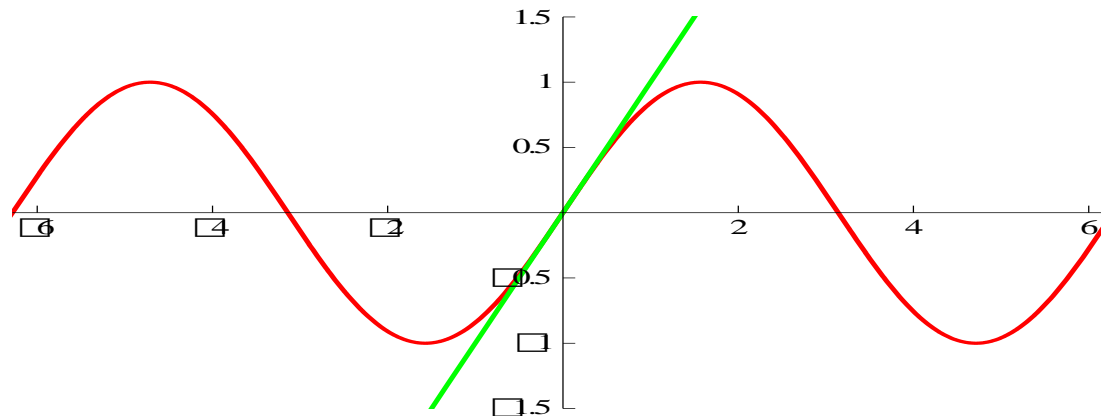


微分到底是什么样的量?

- 微分 dy 是 Δy 的线性主部
- 微分 dy 在 $\Delta x \rightarrow 0$ 时是无穷小, 是 Δy 的等价无穷小
- 微分 dy 由表达式 $dy = f'(x_0)\Delta x$ 确定是一个普通的函数
它是自变量 Δx 的线性函数
在 Δx 定义范围内任何值时, 它有确定的值与之对应
- $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ 并非表明这个差总比 Δx 小, 但在 Δx 小到某程度这个差会远比 Δx 小

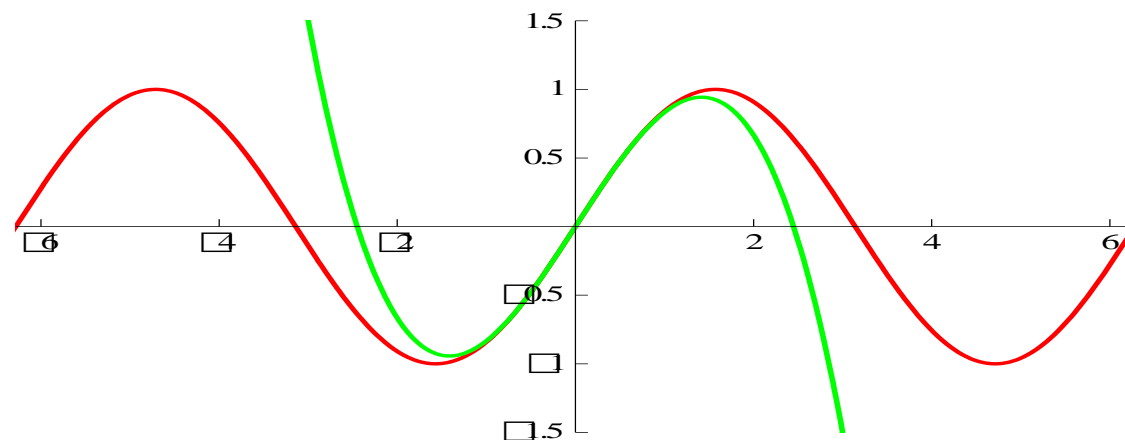
函数 $\sin x$

用 $f(x) = x$
近似

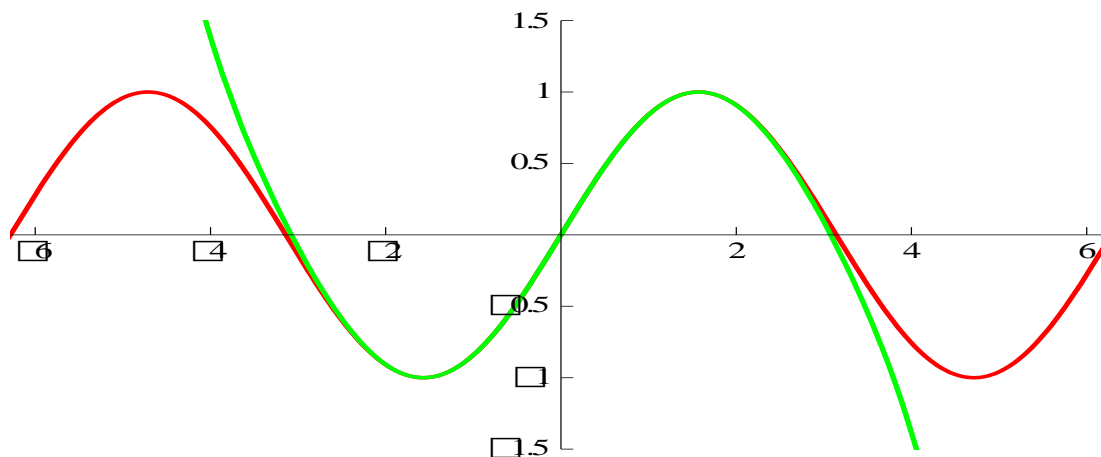


用多项式近似

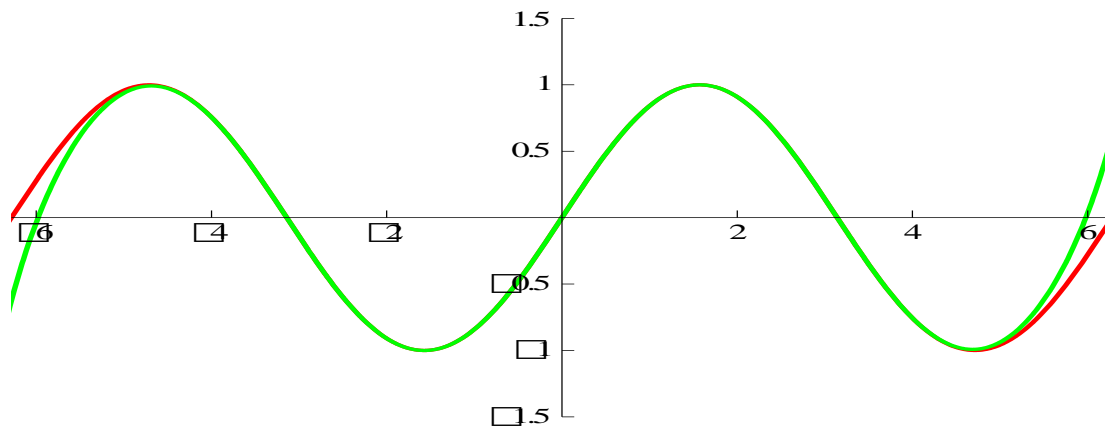
用 $f(x) = x - x^3/6$
近似



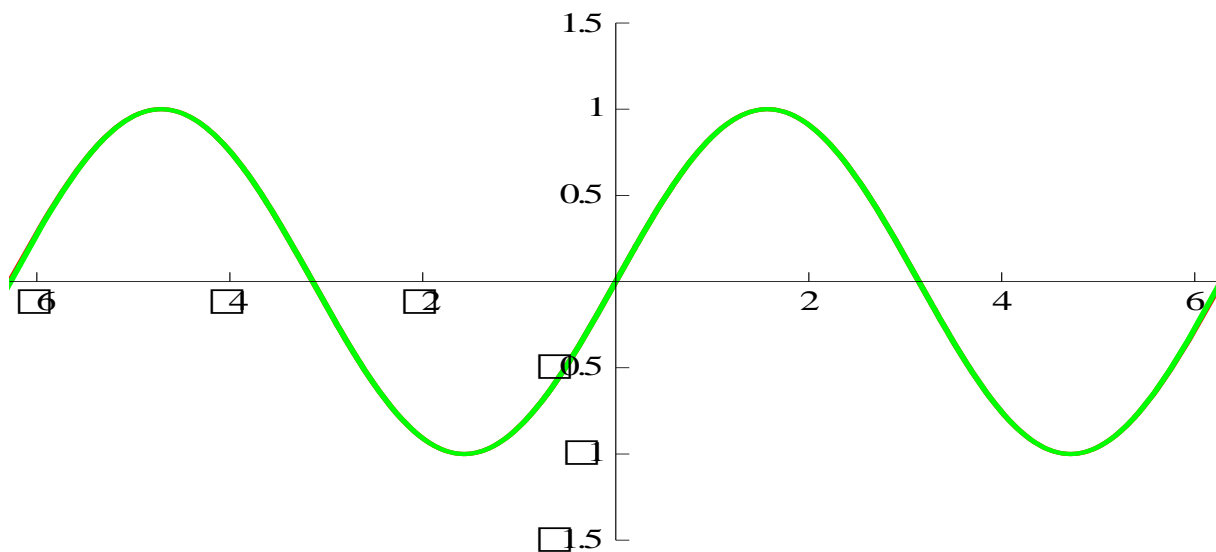
用7次多项式近似



用13次多项式近似



用17次展
开式近似



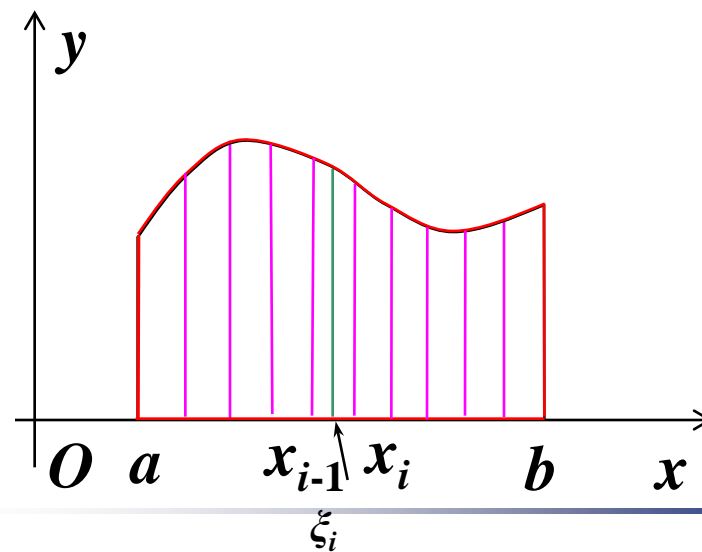
○ 积分 - 分布率不
均匀的量的总量

求面积

分割→求和

$$f(\xi_i)\Delta x_i \leftarrow$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x)dx$$



怎样学习高等数学



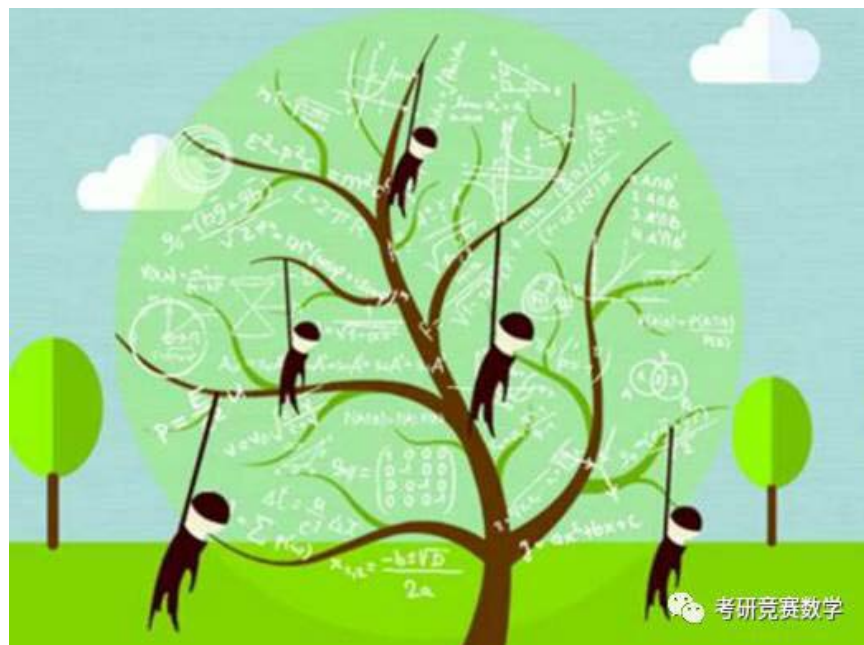
➤ “高等数学好恐怖”

一开始并不觉得难啊，为什么越学越困难

上课感觉能听懂，怎么一做题就蒙圈了

平时作业都做了，考试却考砸了

简直没信心了，只求别挂就行了



大学有棵高数(树)，上面挂了好多人

➤ 学不好的一些原因

停留在中学数学学习方法

- 只满足做题目

丧失对数学的兴趣

- 感到高等数学很抽象、枯燥

- 不知道数学对自己专业乃至职业的作用

缺乏学习的动力

- 学习的目标不明确

- 尽管很努力还是没学好

➤ 改变我们的学习方法

这课程首要的是教会我们如何思考

— G.Polya

适应大学学习环境，学会自学为主的方法

- 最好预习，看将要上课的内容你懂不懂
- 学会记笔记，老师讲课通常与教材不一样
- 课后不能只把作业完成就万事大吉
- 需要复习、弄清这堂课的主要、关键内容，典型例题，最好再整理一下笔记

逐步学会独立思考、独立分析并解决问题

- 举一反三，弄明白处理一类问题的规律
- 不要遇到难题就查答案，问同学，更忌讳抄作业，多想一想尽量自己解决
- 这道题能不能用两种或几种方法？

没听懂、没学会的地方别轻易放弃

- 高等数学课程有内在的逻辑关系，前面没有弄懂，会影响后续内容的学习
- 多化点时间和功夫，以后可以少化时间

要掌握重点，了解难点

- 各部分内容的重要性不一样
- 基本概念、重要结论和方法必须熟练掌握
- 有些内容只要了解和知道就行了

学习一个阶段应该要做个总结

- 整理总结一下：概念、定理、解题方法
- 总结后的内容要写下来，以后复习就用这个为主
- 是否感到条理清楚了、重点难点掌握了，这部分的内容内容“变少了”，书“变薄了”

► 学习一点数学思维方法

与图形结合的方法

- 高等数学研究的对象是函数，一般可将概念、性质和命题与图形联系起来
- 直观的图形有利于加深印象和对问题的理解
- 多元微分、积分问题的解决需要了解几何区域的形状
- 养成作图的习惯

类比的方法

当理智缺乏可靠的论证的思想时， 类比
往往指引我们前进

— *Kant*

— 极限：从数列极限到函数极限

— 微分、积分：从一元到多元

化归 – 从特殊到一般

将问题规范化，归结到已解决或易解决的问题

— 函数的连续性 – 从一点到定义区间

掌握典型例子和反例

- 有助理解概念：加深对概念或命题的理解
- 说明特殊情况 反映数学的严密性
- 出乎意料 说明数学的魅力，直觉可能不正确

○ *Dirichlet* 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 有理数} \\ 0 & x \text{ 无理数} \end{cases}$$

- 周期函数但没有最小正周期
- 无处有极限，无处连续

— 可构造仅在 $x=0$ 连续的函数、仅在 $x=0$ 可导的函数

○ 无界但非无穷大数列

$$x_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$$

○ 连续不可导的例子

$$y = |x|$$

○ 函数处处可导,但导函数间断

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

数学就有数量(级)的概念

定量比较： 个、十、百、千、万、…、亿、…

B、K、M、G、T (数据单位)

— 无穷小分析也有比较(贯串整个课程)

极限—微分—积分微元法—级数敛散判别

若 $x \rightarrow 0$ 时, $\Delta \rightarrow 0$

$$\sin \Delta \sim \Delta, \quad 1 - \cos \Delta \sim \frac{1}{2} \Delta^2, \quad \tan \Delta \sim \Delta$$

$$\ln(1 + \Delta) \sim \Delta, \quad e^{\Delta} - 1 \sim \Delta \quad (1 + \Delta)^{\alpha} - 1 \sim \alpha \Delta$$

$$\arcsin \Delta \sim \Delta, \quad \arctan \Delta \sim \Delta$$

依靠自己，适应变化，学会思考



我们用尽
洪荒之力
鬼知道我们经历了什么

洪荒之力

—那颗高高的大
树与我无缘!

—高数必过!



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

谢谢各位！